Pavel Obdržálek, LA II

2) *Zadání:* Pro které vektory se Cauchy-Schwarzova nerovnost nabyde jako rovnost a pro které jako ostrá nerovnost? (stačí pro reálnou verzi).

2) *Vypracování:* Nechť u, v jsou libovolné vektory z vektorového prostoru V nad tělesem $\mathbb{T}$ se skalárním součinem, kde $\mathbb{T}$ je těleso reálných čísel. Použijeme vzorec pro Cauchy-Schwarzovu nerovnost:

$$\left|\langle u, v\rangle\right| \leq \|u\| \, \|v\| \,.$$

Nejdřív se pokusíme dokázat, za jakých podmínek platí rovnost:

$$\left|\langle u, v\rangle\right| = \|u\| \, \|v\| \,.$$

Budeme tedy předpokládat, že $v \neq 0$ a stejně tak $u \neq 0$. Dále předpokládejme, že $\langle u, v\rangle \neq 0$, v opačném případě je zřejmá nerovnost, protože ani $\|u\|$, ani $\|v\|$ rozhodně nebudou záporné. Můžeme dosadit do rovnice

$$u^T v = \left|\langle u, v\rangle\right| = \|u\| \, \|v\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$$

$$u^T v = \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle} = \sqrt{u^T u v^T v}$$

Odtud nahlížíme, že rovnost nastane pouze v případě, že je u násobkem v, tedy pouze pokud jsou tyto vektory lineárně závislé. Ještě se nabízí speciální případ: $v = 0$. I za této podmínky je zřejmé, že jde o rovnost a i tyto vektory jsou lineárně závislé (bez ohledu na u). Obdobně pro $u = 0$.

Ostrá nerovnost, tedy

$$\left|\langle u, v\rangle\right| < \|u\| \, \|v\|$$

pak bude platit ve všech ostatních případech, kdy platí Cauchy-Schwarzova nerovnost, tedy pokud u a v jsou lineárně nezávislé.